CONCOURS D'ADMISSION A L'E.S.M. DE SAINT-CYR EN 1988

CONCOURS SCIENCES

MATHÉMATIQUES II

Option M - P

Durée : 4 heures

Dans l'appréciation des copies, il sera tenu compte de la rigueur des raisonnements et de la précision de la rédaction, mais aussi de la PRÉSENTATION, *de la* LISIBILITÉ *et de l'*ORTHOGRAPHE.

- *Le candidat pourra, à condition de l'indiquer clairement, admettre un résultat afin de traiter les questions suivantes.*
- *La résolution du problème ne nécessite pas l'usage d'une calculatrice.*

Notations

$M_n(\mathbf{R})$ désigne l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbf{R}$. Si $A \in M_n(\mathbf{R})$, on note $Sp(A)$ l'ensemble des valeurs propres réelles de A.

$\mathbf{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique : pour $x = (x_1, ..., x_n)$ et $y = (y_1, ..., y_n)$ éléments de $\mathbf{R}^n$, le produit scalaire $(x \mid y)$ de ces deux vecteurs est $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$. On note $\| x \|$ la norme euclidienne de x.

Pour tout $x = (x_1, ..., x_n)$ de $\mathbf{R}^n$, on identifie x à la matrice colonne $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ de ses composantes dans la base canonique de $\mathbf{R}^n$.

Pour $A \in M_n(\mathbf{R})$ et $x \in \mathbf{R}^n$, on note Ax le vecteur $A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$.

Si U est un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et f une application de U dans $\mathbf{R}$ de classe C^1, on note $f'(a)$ le gradient de f en un point a de U.

(On rappelle que $f'(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)$

Rappels et définitions

1 - Une partie U de $\mathbf{R}^n$ est convexe si, et seulement si,

$$\forall (x, y) \in U^2, \forall \lambda \in [0,1], \lambda x + (1-\lambda) y \in U \ (i.e.\ \forall (x, y) \in U^2, [x, y] \subset U)$$

2 - Soit U une partie non vide convexe de $\mathbf{R}^n$ et f une application de U dans $\mathbf{R}$:

a) On dit que f est *convexe* si, et seulement si,

$$\forall (x, y) \in U^2, \forall \lambda \in [0,1] \quad f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

b) On dit que f est *fortement convexe* si, et seulement si,

il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall (x, y) \in U^2, \forall \lambda \in [0,1]$

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) - \alpha \lambda (1-\lambda) \| x - y \|^2;$$

α est appelé paramètre de convexité forte.

3 - Soit U une partie non vide de $\mathbf{R}^n$ et f une application de U dans $\mathbf{R}$. On dit que x^* est un *point optimal* de f sur U si, et seulement si, f présente en x^* un minimum absolu $(i.e.\ \forall x \in U, f(x) \geqslant f(x^*))$.

I - ÉTUDE DE QUELQUES PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS CONVEXES.

Soit U un ouvert non vide convexe de $\mathbf{R}^n$ et f une application de U dans $\mathbf{R}$ de classe C^1.

1 - Soit $(x, y) \in U^2$ et $\varphi_{x,y} : [0,1] \to \mathbf{R}$
$$t \mapsto f(x + t(y - x)).$$
Montrer que $\varphi_{x,y}$ est de classe C^1 et déterminer $\varphi'_{x,y}(t)$ pour $t \in [0,1]$.

2 - Dans cette question on suppose f convexe.

a) Montrer que, pour tout $(x, y) \in U^2$, $\varphi_{x,y}$ est convexe.

b) En déduire :
$$\forall (x, y) \in U^2, f(y) - f(x) \geqslant (f'(x) \mid y - x) \quad (1)$$

3 - Réciproquement on suppose que f vérifie la relation (1) ci-dessus.

Montrer que f est convexe (Pour $(x, y) \in U^2$ et $\lambda \in [0,1]$, on pourra appliquer (1) à x et $\lambda y + (1-\lambda) x$ puis à y et $\lambda y + (1-\lambda) x$).

4 - Dans cette question on suppose f fortement convexe et on note α un paramètre de convexité forte.

a) Établir que f est convexe, puis que
$$\forall (x, y) \in U^2 \quad \alpha \| x - y \|^2 \leqslant (f'(x) - f'(y) \mid x - y)$$

b) Soit $(x, y) \in U^2$. En remarquant que, pour tout $\lambda \in]0,1]$
$$\frac{f(x + \lambda(y - x)) - f(x)}{\lambda} - (f(y) - f(x)) \leqslant -\alpha(1 - \lambda) \| x - y \|^2$$
Montrer que : $f(y) - f(x) \geqslant (f'(x) \mid y - x) + \alpha \| x - y \|^2$ (2)

c) On suppose U non borné. Montrer que $\lim_{\| x \| \to +\infty} f(x) = +\infty$ (on pourra utiliser la relation (2)).

5 - On suppose que l'application f vérifie la relation (2) ci-dessus.
Montrer que f est fortement convexe.

6 - *Exemple :*
Soit $a \in \mathbf{R}^*$ et $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$
$$(x_1, x_2) \mapsto x_1^2 - a x_2^2$$

a) Indiquer, suivant le signe de a, la nature de la surface de $\mathbf{R}^3$ d'équation $x_3 = f(x_1, x_2)$.

b) Montrer que f est convexe si, et seulement si, $a < 0$.

c) Dans ce cas, f est-elle fortement convexe ?

T. S. V. P.

II - POINTS OPTIMAUX D'UNE FONCTION CONVEXE SUR UNE PARTIE CONVEXE.

Soit U une partie non vide de $\mathbb{R}^n$ et f une application continue de U dans $\mathbb{R}$.

1 - On suppose U ouvert et f de classe C^1. Montrer que si f admet un minimum relatif en $a \in U$, alors $f'(a) = 0$.

2 - On suppose U fermé borné. Montrer que f possède au moins un point optimal.

3 - On suppose U fermé non borné (éventuellement $U = \mathbb{R}^n$) et $\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty$

Montrer que f possède au moins un point optimal.

4 - On suppose U ouvert et convexe, et f convexe de classe C^1.

a) Montrer que si f présente en $x^0 \in U$ un minimum relatif, alors x^0 est un point optimal de f.

b) Montrer que si l'ensemble des points optimaux de f est non vide, c'est une partie convexe de U.

c) On suppose de plus f fortement convexe et $U = \mathbb{R}^n$. Montrer que f possède un point optimal x^0 et un seul.

III - CALCUL APPROCHÉ DU POINT OPTIMAL PAR LA MÉTHODE DU GRADIENT.

Soit f une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1 et fortement convexe (de coefficient de convexité forte $\alpha > 0$).

On suppose f', M-lipschitzienne (avec $M > 0$)

i.e. $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2 \quad \|f'(x) - f'(y)\| \leqslant M \|x - y\|$.

1 - Montrer que $M \geqslant \alpha$.

D'après II.4.c, f possède un point optimal et un seul x^0.

Soit $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs et $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la suite de points de $\mathbb{R}^n$ définie par récurrence par :

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}^n \\ \forall k \in \mathbb{N} \quad x_{k+1} = x_k - \lambda_k f'(x_k) \end{cases}$$

2 - Montrer que, $\forall k \in \mathbb{N} \quad \|x_{k+1} - x^0\|^2 \leqslant (M^2 \lambda_k^2 - 2\alpha\lambda_k + 1)\|x_k - x^0\|^2$

3 - Soit $\Psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

$$t \mapsto M^2 t^2 - 2\alpha t + 1$$

Déterminer deux réels a et b $(0 \leqslant a < b)$ tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \ \Psi(t) \leqslant 1 \Leftrightarrow t \in [a, b].$$

4 - Soit $(a', b') \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < a' < b' < b$.

Montrer que si, pour tout $k \in \mathbb{N}$, λ_k appartient à $[a', b']$, alors il existe $\beta \in [0, 1[$ tel que :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \|x_{k+1} - x^0\| \leqslant \beta \|x_k - x^0\|$$

En déduire dans ce cas la convergence de la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ vers x^0.

5 - Établir la relation $\forall k \in \mathbb{N}, 0 \leqslant f(x_k) - f(x^0) \leqslant M \|x_k - x^0\|^2$.

IV - APPLICATION A LA RÉSOLUTION D'UN SYSTÈME LINÉAIRE.

Dans toute cette partie, A désigne une *matrice symétrique réelle d'ordre n*, v un secteur fixé de $\mathbb{R}^n$ et (S) l'équation linéaire $Ax = v$. On note f l'application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \ f(x) = \frac{1}{2}(Ax \mid x) - (v \mid x).$$

1 - a) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$ et que $\forall x \in \mathbb{R}^n, f'(x) = Ax - v$.

b) En déduire que x est solution de (S) si, et seulement si, $f'(x) = 0$.

2 - a) Montrer que $q_A : x \mapsto (Ax \mid x)$ est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$.

La matrice A est dite *définie positive* si, et seulement si, q_A est définie positive

(i.e. $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \ q_A(x) > 0$)

b) Montrer que A est définie positive si, et seulement si, $Sp(A) \subset \mathbb{R}_+^*$.

3 - a) Montrer que $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2, \forall \lambda \in [0,1]$.

(3) $f(\lambda x + (1-\lambda)y) - \lambda f(x) - (1-\lambda) f(y) = -\frac{1}{2}\lambda(1-\lambda)(A(x-y) \mid x-y)$

b) En déduire que si f est fortement convexe, alors A est définie positive.

On suppose désormais A définie positive et on note $Sp(A) = \{\mu_1, \ldots, \mu_n\}$ avec $0 < \mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \ldots \leqslant \mu_n$.

4 - a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \mu_1 \|x\| \leqslant \|Ax\| \leqslant \mu_n \|x\|$

b) Établir que $\forall x \in \mathbb{R}^n \ (Ax \mid x) \geqslant \mu_1 \|x\|^2$ (Resp. $(Ax \mid x) \leqslant \mu_n \|x\|^2$)

Quels sont les cas d'égalité ?

c) Démontrer alors, à l'aide de (3), que f est fortement convexe.

5 - a) Montrer que l'équation (S) admet une unique solution x^0.

b) Établir que x^0 est l'unique point optimal de f.

6 - A l'aide de IV.4.a, déterminer un réel $M > 0$ tel que f' soit M-lipschitzienne.

7 - Soit $\lambda \in]0, \frac{\mu_1}{\mu_n^2}[$ et $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la suite de points de $\mathbb{R}^n$ définie par

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}^n \\ \forall k \in \mathbb{N} \quad x_{k+1} = x_k - \lambda f'(x_k) \end{cases}$$

a) Montrer, à l'aide de III, que l'on peut trouver $\beta(\lambda) \in [0,1[$ tel que

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \|x_{k+1} - x^0\| \leqslant \beta(\lambda) \|x_k - x^0\|.$$

b) En déduire $\lim_{k \to +\infty} x_k = x^0$

c) Quelle est la valeur minimale prise par $\beta(\lambda)$ lorsque λ décrit l'intervalle $]0, \frac{\mu_1}{\mu_n^2}[$?

—==oOOo==—

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail